DO NOWEJ PODSTAWY PROGRAMOWEJ

Klasa 2

PODRĘCZNIK dla szkół ponadgimnazjalnych

Matematyka Europejczyka

Zakres podstawowy i **rozszerzony**

Katarzyna Nowoświat
Artur Nowoświat

Helion
EDUKACJA

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. Mariana Liskowskiego, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr. Jarosława Pacuły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony
Etap edukacyjny: IV.
Typ szkoły: szkoły ponadgimnazjalne.
Rok dopuszczenia 2013.
Numer ewidencyjny w wykazie: 521/2/2013

Redaktor prowadzący: Joanna Zaręba
Projekt okładki: ULABUKA
Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *http://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie?mepod2
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-2406-5

Spis treści

3.

WYKRES I ZASTOSOWANIA FUNKCJI WYKŁADNICZEJ I LOGARYTMICZNEJ

Wiele zjawisk w przyrodzie można opisać za pomocą modelu wykładniczego. Są to między innymi:

- promieniotwórczość naturalna,
- wzrost bądź spadek liczebności populacji,
- stygnięcie ciał.

3.1. Funkcja wykładnicza i jej wykres

W pierwszej klasie omawialiśmy potęgi o wykładniku wymiernym. Nie będziemy dokładnie definiować potęgi o wykładniku niewymiernym. Oprzemy się tylko na stwierdzeniu, że liczba a^x dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby rzeczywistej x jest jednoznacznie określona.

Przykład 1.

Rozpatrzmy potęgę $3^{\sqrt{2}}$.

Opis	Rozwiązanie
Rozpatrzmy kolejne przybliżenia dziesiętne liczby $\sqrt{2}$ z niedomiarem $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \ldots)$ i nadmiarem $(w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, \ldots)$.	$\begin{cases} w_1 = 1,4 \\ w_2 = 1,41 \\ w_3 = 1,414 \\ w_4 = 1,4142 \\ w_5 = 1,41421 \\ \vdots \end{cases}$ $\begin{cases} w'_1 = 1,4 + 0,1 = 1,5 \\ w_2 = 1,41 + 0,01 = 1,42 \\ w_3 = 1,414 + 0,001 = 1,415 \\ w_4 = 1,4142 + 0,0001 = 1,4143 \\ w_5 = 1,41421 + 0,00001 = 1,41422 \\ \vdots \end{cases}$
Ponieważ liczby $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5, \ldots$ oraz $w'_1,\ w'_2,\ w'_3,\ w'_4,\ w'_5, \ldots$ są wymierne, to umiemy policzyć wartości potęg $3^{w_1},\ 3^{w_2},\ 3^{w_3},\ 3^{w_4},\ 3^{w_5}, \ldots$ oraz $3^{w'_1},\ 3^{w'_2},\ 3^{w'_3},\ 3^{w'_4},\ 3^{w'_5} \ldots$	Znane nam są liczby: $3^{1,4},\ 3^{1,41},\ 3^{1,414},\ 3^{1,4142},\ 3^{1,41421}, \ldots$ $3^{1,5},\ 3^{1,42},\ 3^{1,415},\ 3^{1,4143},\ 3^{1,41422}, \ldots$
Kolejne przybliżenia liczby $3^{\sqrt{2}}$ z niedomiarem są coraz większe, a kolejne przybliżenia tej liczby z nadmiarem są coraz mniejsze.	$3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < 3^{1,41421} < \ldots$ $3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > 3^{1,4143} > 3^{1,41422} > \ldots$
Różnice kolejnych przybliżeń są liczbami coraz bliższymi zera.	$3^{1,5} - 3^{1,4} \approx 0,5406$ $3^{1,42} - 3^{1,41} \approx 0,052$ $3^{1,415} - 3^{1,414} \approx 0,0052$ $3^{1,4143} - 3^{1,4142} \approx 0,0005$ $3^{1,41422} - 3^{1,41421} \approx 0,00005$
Można wykazać, że istnieje dokładnie jedna liczba α zawarta między liczbami 3^w i $3^{w'}$, gdzie w i w' są dowolnymi liczbami wymiernymi takimi, że $w < \sqrt{2} < w'$.	Liczba ta jest oznaczona symbolem $3^{\sqrt{2}}$.

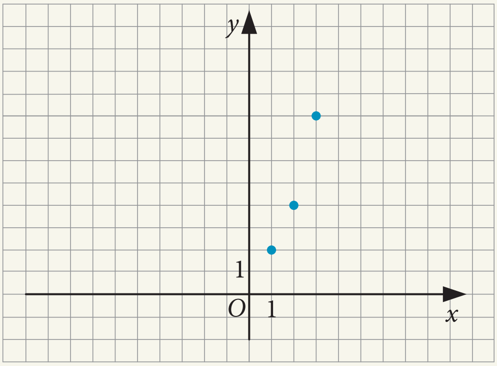
Można wykazać, że własności działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym są takie same jak w przypadku potęg o wykładniku wymiernym.

Pewna rozrastająca się populacja bakterii co dzień podwaja swą wielkość i po pewnym czasie liczy 2 miliony bakterii.

Niech y_0 oznacza liczbę bakterii w chwili początkowej. Możemy zapisać, że po pierwszym dniu liczba bakterii będzie wynosiła $2y_0$, po dwóch dniach $2^2 y_0$, po trzech dniach $2^3 y_0$ itd.

Zatem liczbę bakterii po x dniach można wyrazić wzorem $y(x) = y_0 \cdot 2^x$. W szczególnym przypadku, gdy $y_0 = 1$, tzn. gdy populację zapoczątkowała jedna bakteria, wzór ten ma postać $y(x) = 2^x$.

Wykres takiej funkcji wygląda następująco:



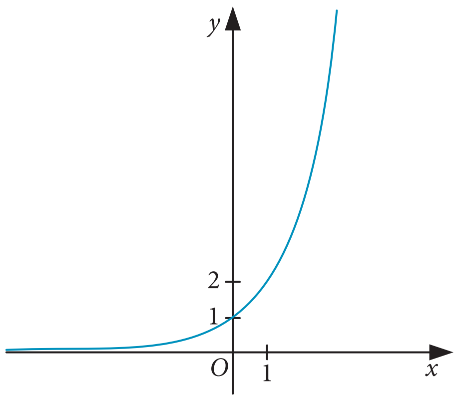
Rozważania z powyższego przykładu można uogólnić (patrz przykład 2.).

Przykład 2.

Dana jest funkcja $y(x)=2^x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Wykonajmy częściową tabelę wartości funkcji dla tych argumentów, dla których te wartości łatwo obliczyć, i naszkicujmy jej wykres.

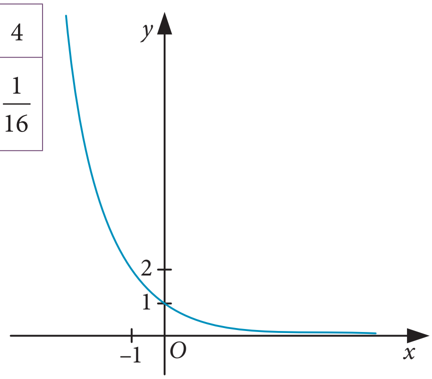
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Widzimy, że funkcja $y(x)=2^x$ jest rosnąca i dla $x>0$ wzrost wartości funkcji jest bardzo szybki. Mówimy, że funkcja ta ma wzrost typu wykładniczego, a wykres tej funkcji jest krzywą wykładniczą. Zauważmy, że jeśli podstawę 2 zastąpimy inną liczbą większą od 1, to ogólny kształt wykresu funkcji nie zmieni się.



Przykład 3.
Dana jest funkcja $y(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dla rzeczywistego argumentu x. Sporządźmy tabelę wybranych wartości funkcji i naszkicujmy jej wykres.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



Widzimy, że funkcja $y(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest malejąca. Mówimy, że maleje ona w sposób wykładniczy.

Definicja

Funkcję określoną wzorem

$$f(x)=a^x,$$

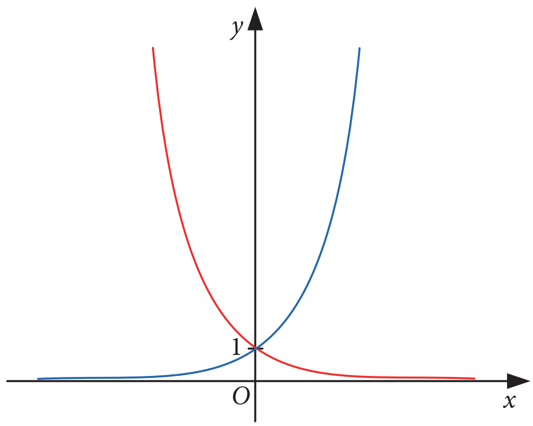
gdzie $x\in\mathbb{R}$ oraz $a>0$ i $a\neq 1$, nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Dla $0<a<1$ funkcja wykładnicza jest malejąca (wykres czerwony).

Dla $a>1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca (wykres niebieski).

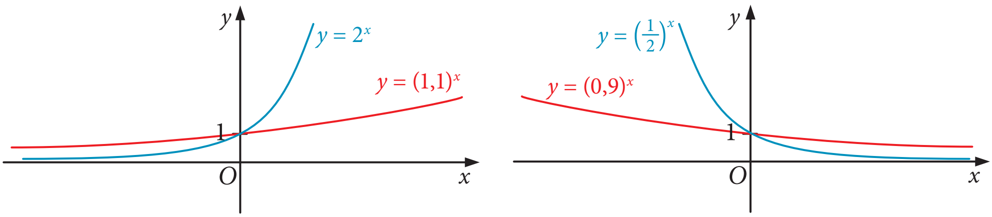
{ Uwaga }

Zastrzeżenie $a\neq 1$ jest konieczne, ponieważ dla $a=1$ wzór $y(x)=a^x$ definiuje funkcję stałą $y(x)=1$, której nie zaliczamy do funkcji wykładniczych.



Wykresy funkcji $y(x)=a^x$ i $y(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, gdzie $a>0$ i $a\neq 1$, są do siebie symetryczne względem osi Oy.

Rozważmy kilka przykładów wykresów funkcji wykładniczych.



Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest przedział $(0, \infty)$.

Oś Ox nazywamy asymptotą poziomą wykresu funkcji.

Funkcja wykładnicza przyjmuje każdą wartość dodatnią dokładnie jeden raz.

Wykres funkcji przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$.

Korzystając z wykresów funkcji wykładniczej $y = a^x$, możemy rysować inne wykresy funkcji postaci $y = a^x + b$, przesuwając wykres funkcji wzdłuż osi Oy o b jednostek, czy też postaci $y = a^{x-c}$, przesuwając wykres funkcji równolegle do osi Ox o c jednostek.

Jedną z najbardziej wiarygodnych metod obliczania wieku różnych przedmiotów czy organizmów jest datowanie radiowęglowe. Metoda ta jest oparta na pomiarze proporcji między izotopem promieniotwórczym węgla ^{14}C a izotopami trwałymi ^{12}C i ^{13}C. Opracował ją Willard Libby ze swoim zespołem w 1949 roku. Libby otrzymał Nagrodę Nobla w dziedzinie chemii w 1960 roku.

Wiadomo, że jeżeli substancja o masie N_0 ma czas połowicznego rozpadu h, to masę pozostałą po czasie t obliczamy według wzoru $N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$.

Czas połowicznego rozpadu izotopu węgla ^{14}C to około 5730 lat.

Dla przykładu rozważmy następującą sytuację: stwierdzono, że masa izotopu węgla ^{14}C w znalezionym przez archeologów przedmiocie wynosi 80% masy wyjściowej. Sprawdźmy, sprzed ilu lat pochodzi ten przedmiot.

Z treści zadania wiemy, że $N = 0{,}8N_0$, zatem

$$0{,}8N_0 = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}},\quad 0{,}8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}},$$

$$\log 0{,}8 = \frac{t}{5730}\log\frac{1}{2},\quad t = \frac{5730\cdot\log 0{,}8}{\log 0{,}5}.$$

Znalezisko pochodzi więc sprzed około 1845 lat.

Czas (lata)	Względna ilość izotopu ^{14}C
0	100,00%
1	99,99%
2	99,98%
10	99,88%
100	98,80%
500	94,14%
1000	88,62%
2000	78,54%
5000	54,67%
10 000	29,89%
50 000	0,24%

Zadania

1 Sporządź szablon wykresu funkcji $y = 2^x$ i posługując się nim, naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 2^x + 1$ b) $y = 2^x - 2$ c) $y = 2^{x-2}$

d) $y = 2^{x+2}$ e) $y = 2^{x-3} + 1$ f) $y = 3 - 2^x$

g) $y = 2^{-x}$ h) $y = -2^x$ i) $y = -2^{-x}$

2 Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 2^{|x|}$ b) $y = \left|2^x\right|$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$

3 Wśród podanych wzorów znajdź takie, które przedstawiają funkcje równe:

$f_1(x) = 2^{x+3}$ $f_2(x) = 2^{x-3}$ $f_3(x) = 8 + 2^x$ $f_4(x) = 8 \cdot 2^x$

$f_5(x) = \frac{2^x}{8}$ $f_6(x) = 8^x$ $f_7(x) = 2^{x^2}$ $f_8(x) = 2^{2x}$

4 Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $y = a^x$ należy punkt Q.

Oblicz a, gdy:

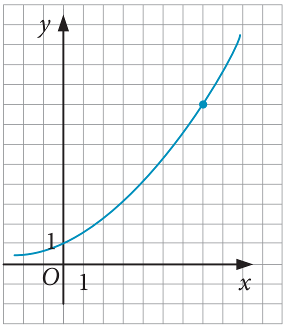
a) $Q = (3, 8)$ b) $Q = (3, 27)$ c) $Q = \left(10, \frac{1}{1024}\right)$

d) $Q = \left(3, \frac{1}{64}\right)$ e) $Q = (4, 4)$ f) $Q = \left(3, 3\sqrt{3}\right)$

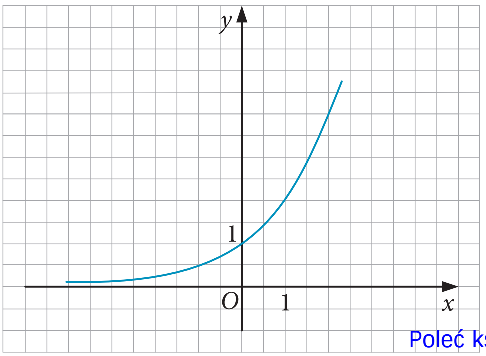
5 Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej f, której wzór ma postać $f(x) = a^x$.

a) Na podstawie zaznaczonego punktu na krzywej wykładniczej znajdź wartość a.

b) Naszkicuj wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x) - 1$.



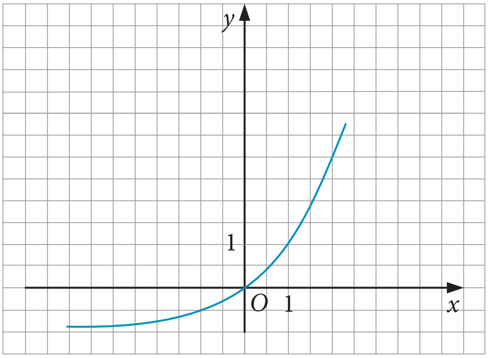
6 Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = 2^x$.



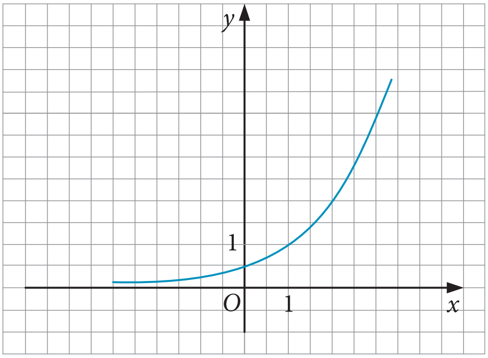
Kup książkę Poleć książkę

Napisz wzór funkcji, której wykres przedstawiono na poniższym rysunku, wiedząc, że wykres ten powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f.

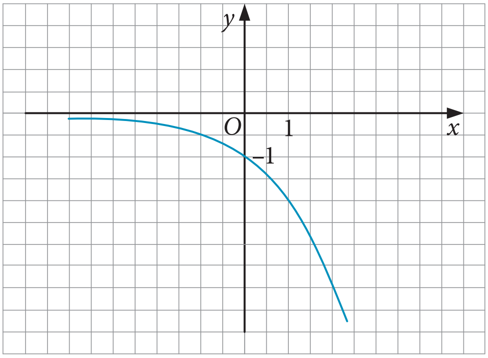
a)



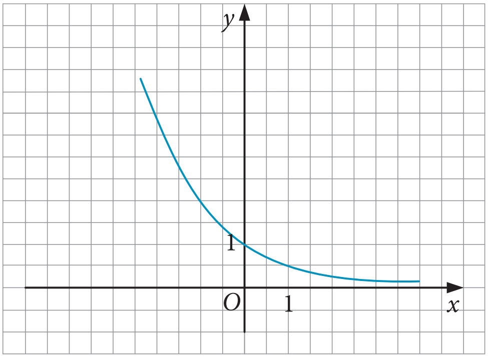
b)



c)



d)



7 Za pomocą czterech doświadczeń dokonano pomiaru pewnych wielkości t i V. Istnieje przypuszczenie, że wielkości te można opisać za pomocą modelu matematycznego wykorzystującego funkcję wykładniczą daną wzorem $V = b \cdot a^t$, gdzie b i a są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla danego doświadczenia. Które wyniki pomiarów wykluczają to przypuszczenie?

a)

t	0	0,5	1
V	10	5	2,5

b)

t	0	5	10
V	0,001	0,032	1,024

c)

t	0	2	4
V	$\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$	$600\sqrt{2}$

8 Znajdź x, dla którego zachodzi równość:

CD

a) $2^x = 32$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ c) $12^x = 12^2$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = \frac{1}{64}$

e) $4^{2x} = \frac{1}{256}$ f) $4^{x+4} = 4^{1-x}$ g) $7^x = 1$

9 Liczba bakterii pewnej kolonii powiększa się o 50% co godzinę. Jeśli kolonia ta w południe liczyła 3 miliony, to podaj jej liczbę w przedziałach półgodzinnych od 10^{30} do 14^{00}. Odpowiedź podaj z dokładnością do wartości całkowitej. Do obliczeń można użyć kalkulatora.

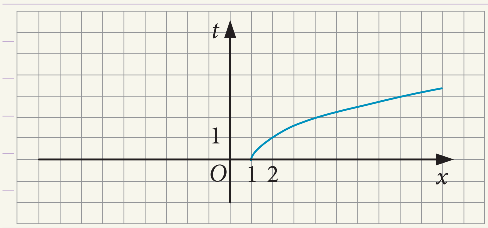
10 Pewna cząstka radioaktywna ma masę 50 gramów, a jej rozpad powoduje zmniejszenie masy o 20% każdego roku. Podaj wzór na masę tej cząstki po t latach. Narysuj wykres tej funkcji. Na podstawie wzoru i wykresu udziel odpowiedzi na poniższe pytania z dokładnością do pełnych miesięcy.

a) Kiedy masa tej cząstki wynosiła 70 gramów?
b) Kiedy masa tej cząstki będzie równa 32 gramy?

Do obliczeń można korzystać z kalkulatora.

*3.2. Funkcja logarytmiczna

Powróćmy do przykładu opisanego w poprzednim rozdziale. Zależność liczby bakterii $y(t)$ od czasu (wyrażonego w dniach), jaki upłynął od momentu, gdy próbka zawierała jedną bakterię, została opisana za pomocą funkcji określonej wzorem $y(t)=2^t$. Chcemy teraz obliczyć, kiedy wartość populacji będzie wynosiła 2 miliony bakterii. Szukamy takiego t, że $2^t = 2000000$. Z definicji logarytmu wynika, że $t=\log_2 2000000 \approx 21$. Jeżeli więc t oznacza czas (wyrażony w dniach), jaki upłynął od momentu, w którym próbka zawierała jedną bakterię, do momentu, gdy zawierała pewną liczbę x bakterii, to otrzymujemy związek $t=\log_2 x$. Zatem jeśli chcemy obliczyć czas t w zależności od liczby bakterii, to możemy obliczyć wartość funkcji określonej wzorem $t(x)=\log_2 x$.
Możemy narysować wykres otrzymanej funkcji, przyjmując, że $x \geq 1$.



Otrzymany wykres jest fragmentem wykresu funkcji nazywanej funkcją logarytmiczną.

Z pierwszej klasy znamy pojęcie logarytmu.

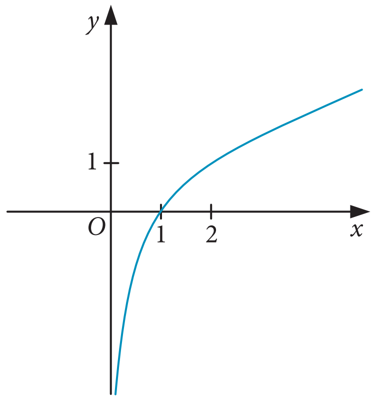
{ Uwaga }

Jeżeli, $a, b > 0$ oraz $a \neq 1$, to logarytmem przy podstawie a z liczby b nazywamy taką liczbę c, że $a^c = b$. Przy takich zastrzeżeniach można napisać symbolicznie:
$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$.

Przykład 1.

Dana jest funkcja $y = \log_2 x$ dla $x > 0$. Sporządźmy tabelę wybranych wartości tej funkcji i naszkicujmy jej wykres.

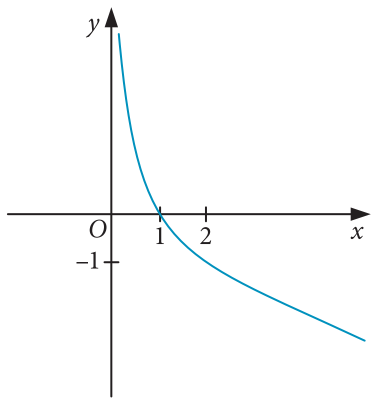
x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3



Przykład 2.

Dana jest funkcja $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ dla $x > 0$. Sporządźmy tabelę wybranych wartości tej funkcji i naszkicujmy jej wykres.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



Definicja

Funkcję określoną wzorem:

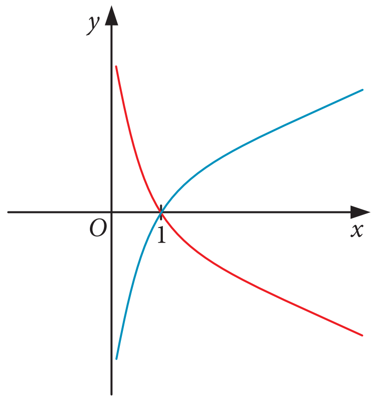
$f(x) = \log_a x$,

gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ oraz $a > 0$, $a \neq 1$, nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a.

Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

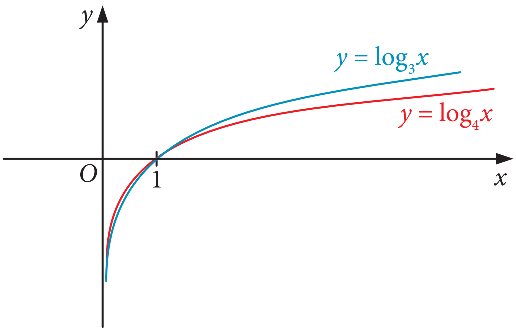
Dla $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna jest malejąca (wykres czerwony).

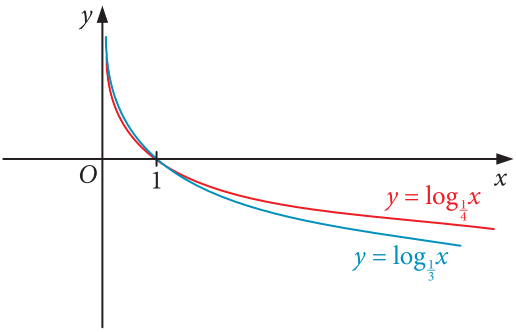
Dla $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest rosnąca (wykres niebieski).



Wykresy funkcji $y = \log_a x$ i $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ są do siebie symetryczne względem osi Ox.

Oto kilka przykładów wykresów funkcji logarytmicznych:





Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest przedział $(-\infty, \infty)$.

Oś Oy nazywamy asymptotą pionową wykresu tej funkcji.

Funkcja logarytmiczna każdą wartość przyjmuje dokładnie jeden raz.

Wykres funkcji przecina oś Ox w punkcie o współrzędnych $(1, 0)$.

Przesuwając wykres funkcji logarytmicznej $y = \log_a x$ wzdłuż osi układu współrzędnych, możemy rysować inne wykresy funkcji, np.:

1. funkcję $y = \log_a x + b$ rysujemy, przesuwając wykres funkcji $y = \log_a x$ wzdłuż osi Oy o b jednostek,
2. funkcję $y = \log_a (x - c)$ rysujemy, przesuwając wykres funkcji $y = \log_a x$ wzdłuż osi Ox o c jednostek.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. Rzeczywiście:

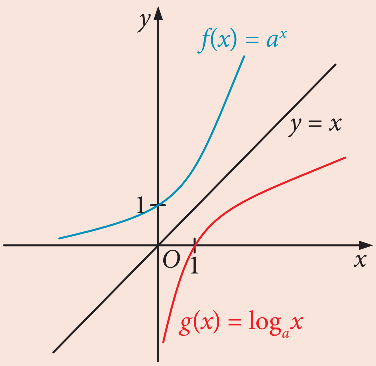
$y = a^x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \log_a y$, przy założeniu, że $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $y > 0$.

Funkcja $x(y) = \log_a y$ jest funkcją zmiennej y i jej wykres pokrywa się z wykresem funkcji $y(x) = a^x$. Jeżeli chcemy narysować wykres funkcji $y(x) = \log_a x$, musimy zamienić rolami zmienne x i y. Przekształceniem, w którym oś Ox przechodzi na oś Oy i odwrotnie, jest odbicie symetryczne względem prostej $y = x$.

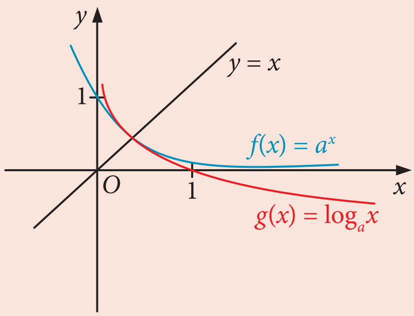
Przedstawmy w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji wykładniczej i odwrotnej do niej logarytmicznej o tej samej podstawie a.

Wykres funkcji odwrotnej g do danej funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $y = x$.

Dla $a > 1$ wykresy nie mają punktów wspólnych.



Dla $0 < a < 1$ wykresy przecinają się w punkcie należącym do prostej $y = x$.



Czy wykresy funkcji wykładniczej i odwrotnej do niej funkcji logarytmicznej o podstawie $0 < a < 1$ mają punkty wspólne?

Rozpatrzmy dwie funkcje:

$f(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{16}} x$.

Można zauważyć, że dla $x = \frac{1}{4}$ mamy $f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

oraz dla $x = \frac{1}{2}$ mamy $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Zatem wykresy tych funkcji przecinają się w punktach o współrzędnych $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Zadania

CD **1** Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = \log_2 x$ b) $y = \log_2(x+1)$ c) $y = -1 + \log_2 x$ d) $y = 1 - \log_2 x$

CD **2** Naszkicuj odpowiednie wykresy funkcji i korzystając z nich, podaj rozwiązania nierówności:

a) $\log_3 x \le 3$ b) $\log_{\frac{1}{3}} x \ge -1$ c) $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

3 Dla jakiej wartości k punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_k x$?

a) $P = (8, 3)$ b) $P = (125, 3)$ c) $P = (1000, 3)$

d) $P = (64, -3)$ e) $P = (729, -6)$

4 Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji i zapisz ich dziedziny:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_2 x + 2$

c) $f(x) = \log_2(x+2)$ d) $f(x) = \log_2(x+2) + 2$

3.3. Spoza podstawy programowej — skala logarytmiczna

Aby zobrazować, do czego może w praktyce służyć skala logarytmiczna, spójrzmy na poniższy opis.

Wiemy, że pewna wielkość y rośnie wraz ze wzrostem innej wielkości x szybciej niż liniowo. Nie wiemy jednak, czy y zależy od drugiej, czy może trzeciej potęgi x. Zapiszmy więc $y = Ax^n$, gdzie stałe A oraz n są nieznanymi liczbami rzeczywistymi.

Po obustronnym zlogarytmowaniu otrzymujemy: $\log y = \log Ax^n$, a stąd na podstawie własności działań na logarytmach mamy: $\log y = \log A + n \log x$.

Zatem jeśli na obu osiach Ox i Oy umieścimy logarytmy odpowiednich wartości, to wykresy jednomianów stopnia dodatniego, funkcji pierwiastkowej itp. staną się prostymi. Wartości $\log A$ oraz n możemy odczytać z wykresu.

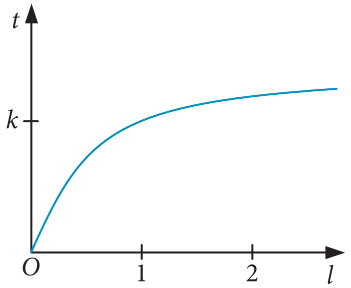
Przykład 1.
Przyjrzyjmy się wynikom, jakie otrzymano w pewnym eksperymencie z wahadłem.

Długość wahadła (w metrach) l	0,6	1,0	1,4	1,8	2,2
Średni czas wahnięcia (w sekundach) t	1,54	2,03	2,39	2,67	2,97

Przedstawmy teraz wykres funkcji po zlogarytmowaniu.

Jeśli $t = kl^n$, to $\log t = \log kl^n = \log k + n \log l$.

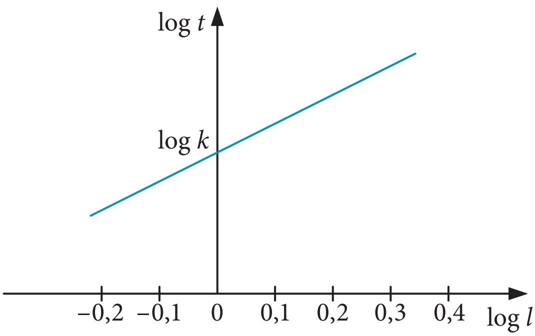
Wynika z tego, że wykresem $\log t$ jako funkcji $\log l$ będzie prosta o takim kącie nachylenia α, że $\mathrm{tg}\,\alpha = n$. Przecina ona oś $\log t$ w punkcie o rzędnej $\log k$.



$\log l$	$-0,222$	$0,000$	$0,146$	$0,255$	$0,342$
$\log t$	$0,188$	$0,307$	$0,378$	$0,427$	$0,473$

Tangens kąta nachylenia prostej do osi odciętych liczymy, dzieląc stosunek przyrostu wartości funkcji przez przyrost argumentów. Biorąc dane ze skrajnych kolumn tabeli, otrzymujemy:

$$n = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{0,473 - 0,188}{0,342 - (-0,222)} \approx 0,5.$$



Natomiast $\log k$ jest rzędną punktu przecięcia wykresu funkcji z osią rzędnych, czyli $\log k = 0,307$, a w konsekwencji $k = 2,03$. Z danych doświadczalnych wynika, że badaną funkcję w przybliżeniu opisuje wzór $t = 2,03 l^{0,5}$.

3.4. Z zastosowań matematyki

Temat badawczy nr 1

Opis ćwiczenia

Przeprowadzono pewien eksperyment, na podstawie którego określono, że liczba bakterii w pewnej hodowli wzrasta każdego dnia. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Czas [dni]	0	1	2	3	4	5	6	7
Liczba bakterii w przybliżeniu	100	200	400	800	1600	3200	6400	12 800

Ćwiczenie 1.

a) Znajdź wzór funkcji opisującej powyższą zależność.
b) Oblicz przybliżoną liczbę bakterii tej kolonii po 1,25 dnia oraz po 2,25 dnia.
c) Oblicz, w którym dniu liczba bakterii wynosiła 102 400.
d) Oszacuj, ile dni przed eksperymentem hodowla składała się z tylko jednej bakterii.

Temat badawczy nr 2

Opis ćwiczenia

Lekarstwa, które przyjmuje człowiek, są stopniowo eliminowane z organizmu. Przybliżona ilość leku, jaka pozostaje w organizmie, zależy od wielkości dawki leku d (mg) oraz czasu t (h) liczonego od momentu zażycia lekarstwa i wyraża się wzorem $P(t)=d\cdot(0,7)^t$, gdzie $t\geq 0$.

Ćwiczenie 2.

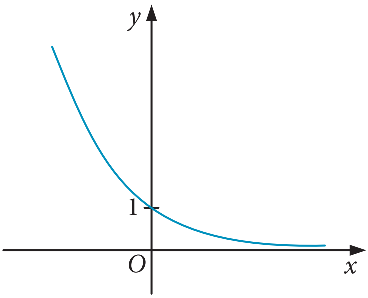
Załóżmy, że chory przyjął 20 mg leku.
a) Oszacuj, ile mg leku znajduje się w organizmie chorego po upływie 6 godzin od momentu zażycia lekarstwa.
b) Wyznacz, ile procent zażytego leku organizm eliminuje w ciągu każdej godziny.
c) Oblicz, jaka najmniejsza liczba godzin musi upłynąć, aby w organizmie chorego pozostało co najwyżej 0,56495 mg leku.

3.5. Prosto do matury

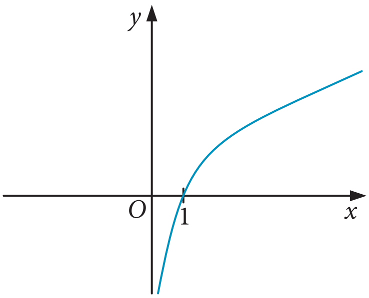
ZESTAW I (TESTOWY)

1 Który rysunek przedstawia wykres funkcji wykładniczej $y=a^x$ dla $a>1$?

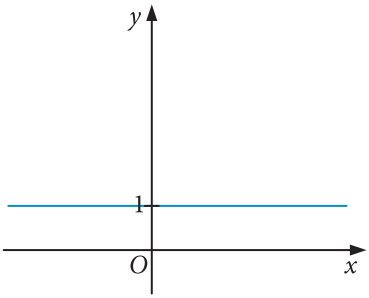
A.



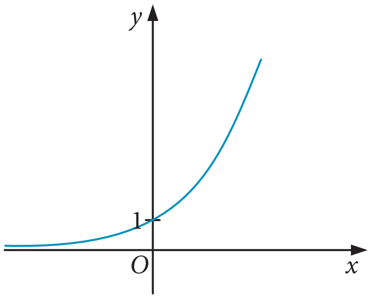
B.



C.

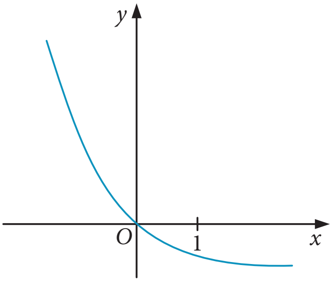


D.

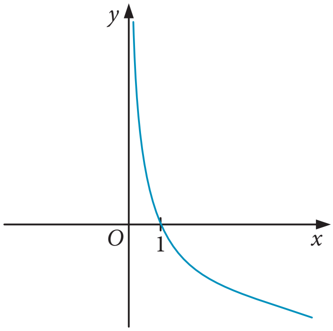


2 Który rysunek przedstawia wykres funkcji wykładniczej $y=a^x$ dla $a<1$?

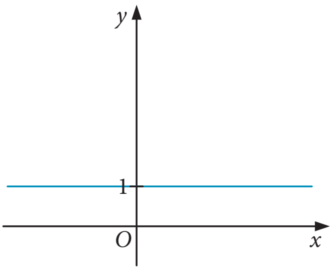
A.



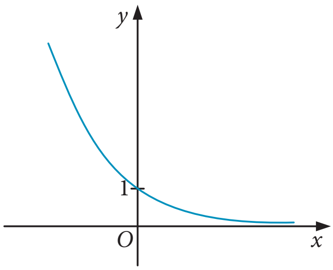
B.



C.



D.



3 Rozważmy funkcje zadane wzorami $f(x)=5^{x-4}$ i $g(x)=2^x$. Wykresy tych funkcji:

A. nie posiadają punktów wspólnych.
B. mają dokładnie jeden punkt wspólny.
C. mają dokładnie dwa punkty wspólne.
D. mają dokładnie pięć punktów wspólnych.

4 Gdy f jest funkcją wykładniczą określoną wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dla $x\in\mathbb{R}$, to wykres funkcji g określonej wzorem $g(x)=-f(x)+3$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. $y=0$ B. $y=1$ C. $y=2$ D. $y=3$

5 Dane jest równanie $x^2 = 2^x$. Jednym z rozwiązań tego równania jest liczba 2.

A. Równanie to nie ma innych rozwiązań.
B. Równanie to prócz rozwiązania $x = 2$ ma jeszcze tylko jedno rozwiązanie, jest ono dodatnie.
C. Równanie to prócz rozwiązania $x = 2$ ma jeszcze tylko jedno rozwiązanie, jest ono ujemne.
D. Równanie to prócz rozwiązania $x = 2$ ma jeszcze co najmniej dwa inne rozwiązania.

6 Liczba rozwiązań równania $2^x = 4x$ jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7 Równanie $\left(\frac{1}{2}\right)^x = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$:

A. nigdy nie ma rozwiązania.
B. może nie mieć rozwiązań.
C. zawsze ma jedno rozwiązanie.
D. może mieć dwa rozwiązania.

8 Jeżeli $\left(4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{3}{5}}\right) : \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^x$, to x jest równe:

A. 2 B. $\frac{15}{16}$ C. $\frac{16}{15}$ D. $\frac{10}{3}$

9 Równanie $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$:

A. ma dokładnie dwa rozwiązania.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. jest sprzeczne.
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

10 Z nierówności $a^{-2} < a^x$ wynika, że:

A. $x > -2$ dla $a \in (0, +\infty)$

B. $x < -2$ dla $a \in (0, 1)$

C. $x < -2$ dla $a \in (1, +\infty)$

D. $x \in \varnothing$ dla $a \in \mathbb{R}$

11 Jeżeli $2^t = 5$ i $6^t = 2$, to 12^t wynosi:

A. 12 B. 5 C. 10 D. 2

12 Wyrażenie $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 27^{-2}}{9^{-5} \cdot \sqrt{3^4}}$ zapisane jako potęga o podstawie 3 ma postać:

A. 3^{-11} B. 3^5 C. 3^2 D. 3^{-5}

13 Punkt $P=\left(-3,\frac{1}{8}\right)$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

A. $y=2^x$ B. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $y=3^x$ D. $y=3^{-x}$

14 Do wykresu funkcji $y=3^{5-2x}$ należy punkt o współrzędnych:

A. $\left(4,\frac{1}{27}\right)$ B. $(3,1)$ C. $(2,-1)$ D. $(1,9)$

15 Wskaż funkcję rosnącą:

A. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ B. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $f(x)=2^{-x}$ D. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

1234
+ 78
1312

ZESTAW II (RACHUNKOWY)

1 Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $y(x)=a^x$ należy punkt $P=(4,256)$. Oblicz a.

2 Wykres funkcji wykładniczej określonej wzorem $y(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ przechodzi przez punkt, którego druga współrzędna y wynosi $\frac{8}{125}$. Znajdź pierwszą współrzędną tego punktu.

3 Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $y=a^x$ należy punkt $P=\left(-2,\frac{4}{9}\right)$. Znajdź wartość tej funkcji dla $x=3$.

4 Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=2^x$ przesunięto względem osi Ox o 3 jednostki w lewo i względem osi Oy o 1 jednostkę w górę. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

5 W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ i $g(x)=\log_2 x$. Podaj rozwiązanie równania $f(x)=g(x)$.

6 W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ i $g(x)=\log_2 x$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\geq g(x)$.

7 Wykres funkcji $f(x)=\log_3(x+m)-k$, której dziedziną jest zbiór $(-3,+\infty)$, przechodzi przez punkt $(6,-5)$. Znajdź m i k.

8 Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x)=\log\left(x-2x^3\right)$.

9 Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x oraz $a>0$ prawdziwa jest nierówność $\dfrac{1}{a^x+a^{-x}-1}>0$.

10 Rozwiąż graficznie nierówność $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \le 8$.

11 Rozwiąż graficznie nierówność $2^x<16$.

12 Znajdź współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji $f(x)=x^3\cdot 8^x+5x^2\cdot 8^x+6x\cdot 8^x$ z osiami układu współrzędnych.

13 Znajdź współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji $f(x)=2^{3-x}$ z wykresem funkcji $g(x)=2^{-x}\cdot x^2+2^{1-x}\cdot x$.

14 Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=2+3^{-x}$.

15 Wiedząc, że $2^t=5$ i $6^t=2$, i korzystając z własności funkcji wykładniczej, oblicz, ile wynosi 6^{-t^2+3t-2}.

ZESTAW III (ZADANIA RÓŻNE)

1 Populacja P pewnego miasta wzrasta zgodnie ze wzorem $P=5000\cdot(1{,}1)^{0{,}2t}$, gdzie $t\in\mathbb{N}$ oznacza liczbę lat po 1980 roku. Jaka będzie liczba mieszkańców tego miasta po 2028 roku?

2 Liczba N oznacza masę pierwiastka radioaktywnego po pełnych t latach rozpadu (N_0 jest masą początkową): $N=N_0(0{,}97)^{0{,}0004t}$. Ile substancji zostanie z 2 gramów po 7500 latach?

3 Przypuśćmy, że rząd zakłada, iż pensje wzrastają w tempie 4% na rok. Jeśli pensje w pewnym szczególnym zawodzie są podnoszone raz na trzy lata, to o ile procent powinny wzrastać, aby nadążyć za roczną średnią założoną przez rząd?

4 Obserwowana uprawa drożdży o objętości 2 cm^3 podwaja swoją objętość co 30 minut. Oblicz objętość uprawy drożdży po upływie jednej godziny oraz po upływie jednej doby.

{ Wskazówka }

Aby rozwiązać zadanie, skorzystaj ze wzoru zamieszczonego w ciekawostce na stronie 73.

5 Jednym z wielu produktów reakcji jądrowej, w której bierze udział uran, jest radioaktywny pluton, którego czas połowicznego rozpadu wynosi 25 000 lat. Jeżeli pewna ilość plutonu została zamknięta w betonie, to jaka jego część pozostanie po 100 000 lat?

SKOROWIDZ

R

S

Ś

T

U

W

Z


PROGRAM
PARTNERSKI
GRUPY WYDAWNICZEJ HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA WYDAWNICZA
Helion SA

Dobre wyniki z matematyki

Matematyka jest wszędzie — nie tylko w szkole, lecz także w bankach, na budowach, w internecie czy... w muzyce. Nawet jeśli nauka matematyki nie jest Twoim ulubionym zajęciem, ona będzie Ci towarzyszyć przez całe życie. Zacznij więc główkować z ***Matematyką Europejczyka*** i rozwijaj swoją wyobraźnię dzięki wiedzy na temat geometrii. Dowiedz się, co wspólnego mają ciągi z kryptografią, i przekonaj się, co wyniknie z mnożenia wielomianu przez wielomian. Dzięki udogodnieniom zastosowanym przez autorów łatwo znajdziesz interesujące Cię notatki z lekcji, zestawy zadań z serii ***Prosto do matury*** oraz praktyczne i zaskakujące tematy badawcze. Książka pozwala uczniom zdobyć umiejętności wykraczające poza podstawę programową, jest też świetną pomocą podczas samodzielnej nauki.

Kompletny zestaw Matematyka Europejczyka. Klasa 2

stanowią: **podręcznik + zbiór zadań + płyta CD**.

Seria podręczników, zbiorów zadań i płyt CD *Matematyka Europejczyka* wydawnictwa Helion pozwala uczniom zdobywać wiedzę bez stresu, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesujący i niebanalny sposób.

Matematyka Europejczyka – TO SIĘ LICZY!

http://edukacja.helion.pl

helion.pl
księgarnia internetowa

Helion
EDUKACJA

Nr katalogowy: 5229

Księgarnia internetowa:
http://helion.pl

Zamówienia telefoniczne:
0 801 339900
0 601 339900

Sprawdź najnowsze promocje:
http://helion.pl/promocje
Książki najchętniej czytane:
http://helion.pl/bestsellery
Zamów informacje o nowościach:
http://helion.pl/nowosci

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-246-2406-5

9 788324 624065

Informatyka w najlepszym wydaniu